ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Самандаров Тожи Нормуродович, PhD,

tojiddinsamandarov@gail.com,

Учитель Математики UNIVERSITY OF BUSINESS AND SCIENCE LLC,

Ташкент, Узбекистан

Аннотация: В данной работе рассматривается задача типа Стефана для системы квазилинейных параболических уравнений, которая возникает в модели заживления ран. Исследование нелинейных задач со свободными границами методом, основанным на построении априорных оценок. Поэтому сначала устанавливаются некоторые первоначальные априорные оценки для решения рассматриваемой задачи. Затем задача сводится к задаче с фиксированной границей через замену переменных. Полученная задача имеет зависящие от времени и положения в пространстве коэффициенты с нелинейными слагаемыми. Далее построены априорных оценок типа Шаудера для решения уравнения с нелинейными слагаемыми и закрепленной границей. На основе полученных оценок доказана единственность решения задачи. Затем мы доказываем глобальное существование решения задачи с помощью теоремы Лерэ-Шаудера о неподвижной точке.

Ключевые слова: Квазилинейное параболическое уравнение, свободная граница, априорные оценки, теорема существования и единственности.

THE STEFAN PROBLEM FOR A SYSTEM OF PARABOLIC EQUATIONS

Samandarov Toji Normurodovich, PhD,

The Mathematics teacher of the UNIVERSITY OF BUSINESS AND SCIENCE LLC ,

tojiddinsamandarov@gail.com,

Tashkent, Uzbekistan

Abstract. This paper considers the Stefan-type problem for a system of quasi-linear parabolic equations, which arises in a model of wound healing. Nonlinear problems with free boundaries are studied using a method based on constructing a priori estimates. Therefore, some initial a priori estimates for the solution to the problem under consideration are first established. Then, the problem is reduced to a fixed-boundary problem through a change of variables. The resulting problem has time- and space-dependent coefficients with nonlinear terms. Next, Schauder-type a priori estimates are constructed for the equation with nonlinear terms and a fixed boundary. Based on these estimates, the uniqueness of the solution to the problem is proven. Then, the global existence of the solution to the problem is demonstrated using the Leray-Schauder fixed-point theorem.

Key words: Quasilinear parabolic equation, a free boundary, a priori estimates, existence and uniqueness theorem.

1. Введение.

Модели в математической биологии направлены на объяснение биологических процессов, а затем служат инструментом для продвижения новых исследований в области биологии. Когда предсказания математической модели согласуются с экспериментальными данными, модель может быть использована для проведения экспериментов и для выдвижения новых гипотез. Тем не менее, биологические процессы, как правило, чрезвычайно сложны [1-4].

В этой работе мы рассматриваем систему из двух квазилинейных параболических уравнений реакции-диффузии с свободной границей, которая возникает в модели заживления ран. Хронические раны представляют собой серьезную проблему общественного здравоохранения во всем мире. Основным осложняющим фактором в заживлении ран является ишемия, то есть недостаточное поступление кислорода в область раны, что является результатом повреждения сосудистой системы вокруг раны. Существует несколько математических моделей заживления ран, в которых учитывается эффект кислородной недостаточности [2]. Здесь мы вводим и обобщаем модель, предложенную в [1], которая включает в себя динамику границы раны как свободной границы.

Постановка задачи. Требуется найти функции $s(t)$, $u(t, x)$, $v(t, x)$, удовлетворяющие условиям

$$u_t = (a_1(u, v)u_x)_x + f_1(u, v), \quad D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}, \quad (1)$$

$$v_t = (a_2(u, v)v_x)_x + f_2(u, v), \quad Q = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < l\}, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_0 = s(0) < l, \quad (3)$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$u_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$v_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$v_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$u(t, x) = 0, \quad s(t) \leq x \leq l, \quad (9)$$

$$s'(t) = -a_1(0, v)u_x(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

где $x = s(t)$ – свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения раны, и определяется вместе с функциями $u(t, x)$, $v(t, x)$. Здесь $u(t, x)$ – плотность здоровых тканей вне раны, $v(t, x)$ – концентрация химико-биологических препаратов.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

a) $a_i(u, v) \geq a_{i0} > 0$, a_{i0} , $i = 1, 2$;

b) если $0 \leq u(t, x) \leq M_1 (\|u_0\|, |f_1(0, 0)|)$, $0 \leq v(t, x) \leq M_2 (\|v_0\|, |f_2(0, 0)|)$

(эти неравенства будут установлены для точных M_1, M_2 в теореме 1), то определим множество $\Omega = \{(u, v) : 0 \leq u(t, x) \leq M_1, 0 \leq v(t, x) \leq M_2\}$, причем $0 < M_2 \leq M_1$, $a_i(u, v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, $a_{iu}(u, v) \leq 0$, $f_{iu}(u, v) \leq 0$, $f_{iv}(u, v) \leq 0$, $i = 1, 2$;

c) $f_1(u, v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $f_1(u, v) > 0$, если $u(t, x) \leq 0$,

$f_1(u, v) \leq 0$, если $u(t, x) \geq M_1$ при любом $v(t, x)$;

d) $f_2(u, v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $f_2(u, v) \geq 0$, если $v(t, x) \leq 0$,

$f_2(u, v) \leq 0$, если $v(t, x) \geq M_2$ при любом $u(t, x)$;

e) $u_0(x) \in C^{2+\alpha}$, $0 < u_0(x) < M_1$, $0 \leq x \leq s_0$,

$u'_0(0) = 0$, $u_0(s_0) = 0$, $u'_0(s_0) < 0$,

$v_0(x) \in C^{2+\alpha}[0, l]$, $0 \leq v_0(x) \leq M_2$, $v'_0(0) = 0$, $v'_0(l) = 0$.

Задача (1)-(10) поставлена в работе [1] и изучена в [2] в виде задача со свободной границей в случае $a_2(u, v) \equiv 1$.

2. Априорные оценки.

В этом разделе установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи. При этом широко применяется принцип максимума и теоремы сравнений.

Теорема 1. Пусть функции $s(t)$, $u(t, x)$, $v(t, x)$ являются решением задачи (1)-(10). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2 , не зависящие от T , для которых справедливы оценки

$$0 \leq u(t, x) \leq M_1 (|u_0|, |f_1(0, 0)|), \quad (t, x) \in D, \quad (11)$$

$$0 \leq v(t, x) \leq M_2 (|v_0|, |f_2(0, 0)|), \quad (t, x) \in Q, \quad (12)$$

$$0 < s'(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

Верхняя оценка для $s'(t)$ устанавливается при помощи оценок для $|u_x|$, $|v_x|$, которые будут построены в следующих теоремах.

Теперь для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{cases} a_1(u, v)u_{xx} + b_1(u, v, u_x, v_x) - u_t = 0, & (t, x) \in D, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq s_0, \\ u_x(t, 0) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(t, s(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ s'(t) = -a_1(0, v)u_x(t, s(t)), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} a_2(u, v)v_{xx} + b_2(u, v, u_x, v_x) - v_t = 0, & (t, x) \in Q, \\ v(0, x) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ v_x(t, 0) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ v_x(t, l) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (15)$$

где $b_1(u, v, u_x, v_x) = a_{1u}u_x^2 + a_{1v}v_x u_x + f_1(u, v)$, $b_2(u, v, u_x, v_x) = a_{2v}v_x^2 + a_{2u}u_x v_x + f_2(u, v)$.

При условии е) без ограничений общности можно предполагать, что $v_0(x) = 0$.

Теорема 2. Пусть непрерывная в $\bar{Q}$ функция $v(t, x)$ удовлетворяет условиям задачи (15).

Предположим, что непрерывные функции $a_2(u, v)$, $b_2(u, v, u_x, v_x)$ для $(t, x) \in \bar{Q}$, $|u| \leq M_1$, $|v| \leq M_2$ и произвольных u_x, v_x удовлетворяют условиям

$$\frac{|b_2(x, u, v, u_x, v_x)|}{a_2(u, v)} \leq K_2 (u_x^2 + v_x^2 + 1), \quad K_2 > 0.$$

Тогда

$$|v_x(t, x)| \leq P_0(M_2, a_{20}, K_2, \delta), \quad (t, x) \in Q^\delta. \quad (16)$$

Кроме того, если $a_2(u, v) \leq a_{22}$ в области $\{(t, x) \in \bar{Q}, |u| \leq M_1, |v| \leq M_2, |v_x| \leq P_{02}\}$ то

$$|v|_{\frac{2}{3}}^{Q^\delta} \leq C(M_2, a_{20}, K_2, \delta).$$

И если еще известно, что $v(t, x)$ обладает в $\bar{Q}$ суммируемыми с квадратом обобщенными производными v_{tx}, v_{xx} , то

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^\delta} \leq C(M_2, a_{20}, a_{22}, P_0, K_2, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (17)$$

$$|v|_{2+\beta}^{Q^\delta} \leq C(M_2, a_{20}, a_{22}, P_0, K_2, \delta), \quad 0 < \beta < 1, \quad (18)$$

Если $u|_{\Gamma(x=0, t=0, x=s(t))} = 0$, то оценки (16)-(18) справедливы и в $\bar{Q}$; где $Q^\delta = \{(t, x): 0 < \delta \leq t \leq T, 0 < \delta \leq x \leq 1 - \delta\}$, $a_{20} = \min_{\bar{Q}} a_2(u, v)$, $a_{22} = \max_{\bar{Q}} a_2(u, v)$.

Теорема 3. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и теоремы 2, кроме того $\frac{d}{dx} a_1(u, v) \geq 0$, $N \geq \max_x \frac{u_0(x)}{s_0 - x}$. Тогда $s'(t) \leq M_3$, где M_3 зависит только от данных задачи и не зависит от T .

Доказательство. В задаче (1), (3), (5), (8), производя замену $U(t, x) = u(t, x) + N(x - s(t))$, имеем

$$a_1 U_{xx} - U_t = N s'(t) - a_{1u} u_x (U_x - N) - a_{1v} v_x (U_x - N) - f_1(u, v), \quad (t, x) \in D,$$

$$U_x(t, 0) = N > 0, \quad U(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$U(0, x) = U_0(x) + N(x - s_0) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq s_0.$$

Необходимое неравенство $U(t, x) \leq 0$ в D устанавливается следующим образом. Пусть в некоторой внутренней точке $P = (t_0, x_0)$ функция $U(t, x)$ достигает положительного максимума и в точке P с учетом $U_x(P) = 0$ уравнение примет вид

$a_1 U_{xx} - U_t = N s'(t) + N \frac{d}{dx} a_1(u, v) - f_1(u, v)$. Так как $s'(t) > 0$, $\frac{d}{dx} a_1(u, v) > 0$ и в силу условия с) задачи $f_1(u, v) \leq 0$, то приходим к противоречию.

Тогда по принципу максимума $U(t, x) = u(t, x) + N(x - s(t)) \leq 0$ в D .

В силу теоремы о знаке производной в граничной точке экстремума (см. Chap.15, Th. 4.1;

[5]) $U_x(t, s(t)) = u_x(t, s(t)) + N \geq 0$. Тогда из условия (10) получим $s'(t) \leq \|a_1(0, v)\| \cdot N \equiv M_3$.

В случае задачи (14) априорные оценки строятся следующим образом. Предполагается

выполненным условие теоремы 2 для задачи (14). Произведя замену $\tau = t$, $y = \frac{x}{s(t)}$, распрямляем границу. Тогда области D соответствует область $\Omega_1 = \{(\tau, y) : 0 < \tau \leq T, 0 < y < 1\}$, а для функции $U(\tau, y) = u(\tau, ys(\tau))$ получается задача для уравнении с непрерывными по Гельдеру коэффициентами и правой частью. Применяя метод четного продолжения через правой границы [6], установим оценки для $|w_y|$, $|w|_{l+y}$ вплоть до $y = 1$. А оценки для старших производных получим по результатам для линейных уравнений [5, 7].

Теперь покажем, что неизвестная кривая монотонно возрастает по t и пересекает правую границу $x = l$ при некотором $t = T^*$.

Теорема 5. Существует положительная постоянная $\varepsilon > 0$, не зависящая от T , такая, что

$$s'(t) \geq \varepsilon > 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой сравнения [1], построим субрешение уравнения (1) в виде

$$U(t, x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{2} s_0^2, & 0 < x < s(t) - s_0, \\ \varepsilon_1 [s_0 (s(t) - x) - \frac{1}{2} (x - s(t))^2], & s(t) - s_0 < x < s(t), \end{cases}$$

причем $U(t, x) \in W_{\infty}^{2,1}(D)$, $\varepsilon_1 > 0$ достаточно малое число.

В промежутке $(0, s(t) - s_0)$ имеем

$$LU = U_t - (a_1(U, v)U_x) - f_1(U, v) = -f_1\left(\frac{\varepsilon_1}{2}s_0^2, v\right) < 0.$$

А в промежутке $(s(t) - s_0, s(t))$ находим

$$U_t(t, x) = \varepsilon_1[s_0 - (s(t) - x)]s'(t) \leq \varepsilon_1 M_3,$$

$$f_1(U, v) \geq f_1(0, v) - C_1 \varepsilon_1,$$

а другие члены оператора LU ограничены $C_2 \varepsilon_1$, где C_1 и C_2 положительные константы, не зависящие от ε_1 и T .

Поскольку $f_1(0, v) \geq \mu > 0$, то находим $LU \leq -\mu + \varepsilon_1(M_3 + C_1 + C_2) < 0$. С другой стороны, имеем краевые условия

$$U_x(t, 0) = u_x(t, 0) = 0, \quad U(t, s(t)) = u(t, s(t)) = 0,$$

$$U(0, x) = \frac{\varepsilon_1}{2}s_0^2 < u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_0.$$

Сравнивая функции $u(t, x)$ и $U(t, x)$, имеем $U(t, x) \leq u(t, x)$ в D . Отсюда $u_x(t, s(t)) \leq U_x(t, s(t)) = -\varepsilon_1 s_0$. Тогда условие Стефана дает $s'(t) \geq a_{10} s_0 \varepsilon_1 = \varepsilon > 0$.

Единственность и существование решения.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2 и теоремы 3. Тогда решение задачи (1)-(10) единственно.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 2 и теоремы 3. Тогда существует в $D \cup Q$ решение $u(t, x) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$, $v(t, x) \in C^{2+\beta}(\bar{Q})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}$ ($0 \leq t \leq T^*$) задачи (1)-(10),

причем значение T^* определяется из условия $\lim_{t \rightarrow T^*} s(t) = l$.

Список литературы

1. X. Chen. A free boundary problem arising in a model of wound healing // SIAM J. Math. Anal. 2000. Vol. 32, pp.788-800.
2. P.D. Dale Mathematical Modeling of Corneal Epithelial Wound Healing // Math.Biosciences. 1994. Vol.124, pp.127-147.

**INTERNATIONAL MULTIDISCIPLINARY JOURNAL FOR
RESEARCH & DEVELOPMENT**

SJIF 2019: 5.222 2020: 5.552 2021: 5.637 2022:5.479 2023:6.563

eISSN 2394-6334 <https://www.ijmrd.in/index.php/imjrd> Volume 10, issue 10 (2023)

3. A.Friedman. Free boundary problems arising in biology // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2018, Vol. 23, No. 1. pp. 193-202.
4. G. Webb. The force of cell-cell adhesion in determining the outcome in a nonlocal advection diffusion model of wound healing // J.Mathematical Biosciences and Engineering. 2022, Vol.19. No.9: pp.8689-8704.
5. **Cannon J.R.** The One dimensional *heat equation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. – 500 p.
6. Кружков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. ММО. 1967, т.16, С.329-346.
7. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. –736 с.